Kontinuummekanik

IV - energetik

Rathkjen, Arne

Publication date:
1993

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Link to publication from Aalborg University

Citation for published version (APA):
Rathkjen, A. (1993). *Kontinuummekanik: IV - energetik*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitetscenter. R : Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet Bind R9343 Nr. 1933.1

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITETSCENTER • AUC • AALBORG • DANMARK

TEAM 1993.1

A. RATHKJEN
KONTINUUMMEKANIK
IV - ENERGETIK
DECEMBER 1993

ISSN 0902-7513 R9343

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK
DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITETSCENTER • AUC • AALBORG • DANMARK

TEAM 1993.1

A. RATHKJEN

KONTINUUMMEKANIK
IV - ENERGETIK

DECEMBER 1993

ISSN 0902-7513 R9343

IV ENERGETIK

I energetikken kombineres kinematiske og dynamiske størrelser i begreber som arbejde og energi. Arbejde og energi er skalære størrelser, som behandles i afsnit 16 sammen med de termiske størrelser temperatur og varme. Indre bindinger behandles i afsnit 17 og i afsnit 18 indføres virtuelle kinematiske og dynamiske størrelser og hermed virtuelt arbejde og virtuelle arbejdsprincipper, som sammen med variationsregning fører til nyttige principper og bekvemme regnemetoder.

16 ARBEJDE OG ENERGI

Når angrebspunktet for en kraft $\overline{F}$ flyttes stykket $d\overline{r}$ udfører kraften arbejdsinkrementet dW bestemt ved det skalære produkt

$$dW = d\overline{r} \cdot \overline{F} \tag{16.1}$$

Det samlede arbejde ved en proces, der fører kraften fra $\overline{r}_1$ til $\overline{r}_2$ bliver derfor $W = \int_{\overline{r}_1}^{\overline{r}_2} d\overline{r} \cdot \overline{F}$, et arbejde der generelt afhænger af den vej, langs hvilken kraften føres fra det ene punkt til det andet. Heraf følger, at (16.1) ikke implikerer eksistensen af en arbejdsfunktion for kraften $\overline{F}$, og dW er ikke et eksakt differential.

Arbejde pr. tidsenhed kaldes effekt P og bestemmes ved

$$P = dW/dt = (d\overline{r}/dt) \cdot \overline{F} = \overline{v} \cdot \overline{F} \tag{16.2}$$

hvor $\overline{v} = d\overline{r}/dt$ er hastighedsvektoren.

16.1 Levende krafts sætning

For et legeme påvirket af overflade- og massekræfter vil disse såkaldte *ydre kræfter* have en effekt $P_y(t)$ bestemt ved

$$P_y = DW_y/Dt = \int_s \overline{\sigma} \cdot \overline{v} ds + \int_v \rho \overline{b} \cdot \overline{v} dv \tag{16.3}$$

Ved hjælp af

$$\mathrm{div}(\underset{\sim}{\sigma} \cdot \overline{v}) = \overline{t}^k \cdot (\underset{\sim}{\sigma}'_k \cdot \overline{v} + \underset{\sim}{\sigma} \cdot \overline{v}'_k) = \mathrm{div}\underset{\sim}{\sigma} \cdot \overline{v} + \underset{\sim}{\sigma} : \overline{t}^k \overline{v}'_k = \mathrm{div}\underset{\sim}{\sigma} \cdot \overline{v} + \underset{\sim}{\sigma} : \mathrm{grad}\overline{v} \tag{16.4}$$

finder man med sammenhængen mellem spændingsvektoren og spændingstensoren (12.9), divergenssætningen (5.89) og bevægelsesligningerne (13.9)

$$\begin{aligned} P_y &= \int_s \hat{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \bar{v} ds + \int_v \rho \bar{b} \cdot \bar{v} dv \\ &= \int_v \Big(\operatorname{div}(\underset{\sim}{\sigma} \cdot \bar{v}) + \rho \bar{b} \cdot \bar{v} \Big) dv \\ &= \int_v \Big(\operatorname{div}(\underset{\sim}{\sigma} + \rho \bar{b}) \cdot \bar{v} + \underset{\sim}{\sigma} : \operatorname{grad} \bar{v} \Big) dv \\ &= \int_v (\rho \bar{a} \cdot \bar{v} + \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{l}) dv \end{aligned} \tag{16.5}$$

hvor $\underset{\sim}{l}$ er hastighedsgradienten grad$\bar{v}$.

Da Cauchy's spændingstensor er selvtransponeret, er $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{l} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d}$, hvor tøjningshastighedstensoren $\underset{\sim}{d}$ er den selvtransponerede del af hastighedsgradienten $\underset{\sim}{l}$. Det bemærkes, at $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{I} : (\underset{\sim}{\sigma}^T \cdot \underset{\sim}{d}) = \underset{\sim}{I} : (\underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{d})$, dvs. $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d}$ er første hovedinvariant hørende til $\underset{\sim}{\sigma} \cdot \underset{\sim}{d}$.

For $\int_v \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} dv$ benyttes betegnelsen de *indre kræfters* effekt P_i, altså

$$P_i = \int_v \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} dv \tag{16.6}$$

Med den *kinetiske energi* K defineret ved

$$K = \frac{1}{2} \int_v \rho \bar{v} \cdot \bar{v} dv \tag{16.7}$$

har man

$$\dot{K} = DK/Dt = \frac{D}{Dt} \frac{1}{2} \int_v \rho \bar{v} \cdot \bar{v} dv = \int_v \rho \bar{a} \cdot \bar{v} dv \tag{16.8}$$

og dermed

$$P_y = \dot{K} + P_i \tag{16.9}$$

Ved en proces som forløber mellem tidspunkterne t_1 og t_2, udfører de ydre kræfter arbejdet $W_y = \int_{t_1}^{t_2} P_y dt$, de indre kræfter udfører arbejdet $W_i = \int_{t_1}^{t_2} P_i dt$, mens tilvæksten i kinetisk energi bliver $\Delta K = K_2 - K_1 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{K} dt$. Man kan herefter formulere levende krafts sætning som

$$W_y = \Delta K + W_i \tag{16.10}$$

dvs. i en deformationsproces for et legeme med konstant masse, udfører de ydre kræfter et arbejde, som er lig med summen af tilvæksten i kinetisk energi og de indre kræfters arbejde.

Udtrykkene (16.3) – (16.8) refererer til den deformerede konfiguration. Ønsker man i stedet at operere med den initiale konfiguration, har man

$$P_y = \int_S \overline{\Sigma} \cdot \overline{v} dS + \int_V \rho_0 \overline{b} \cdot \overline{v} d\overline{V} \tag{16.11}$$

som på samme måde som ovenfor omskrives til

$$P_y = \dot{K} + P_i = \frac{D}{Dt}\frac{1}{2}\int_V \rho_0 \overline{v} \cdot \overline{v} dV + \int_V \underset{\sim}{\Sigma} : \underset{\sim}{L} dV \tag{16.12}$$

Da hverken den første Piola-Kirchhoff spændingstensor $\underset{\sim}{\Sigma}$ eller hastighedsgradienttensoren $\underset{\sim}{L}$ er selvtransponerede, kan udtrykket for de indre kræfters effekt ikke reduceres her.

Benyttes (13.17) til at indføre den anden Piola-Kirchhoff spændingstensor i udtrykket for de indre kræfters effekt, finder man

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\Sigma} : \underset{\sim}{L} &= \underset{\sim}{I} : (\underset{\sim}{\Sigma} \cdot \underset{\sim}{L}^T) = \underset{\sim}{I} : (\underset{\sim}{\Sigma}^T \cdot \underset{\sim}{L}) \\
&= \frac{1}{2}\underset{\sim}{I} : (\underset{\sim}{\Sigma} \cdot \underset{\sim}{L}^T + \underset{\sim}{\Sigma}^T \cdot \underset{\sim}{L}) \\
&= \frac{1}{2}\underset{\sim}{I} : (\underset{\sim}{\Sigma} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T} \cdot \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{L}^T + \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{\Sigma}^T \cdot \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{F}) \\
&= \frac{1}{2} I : \left(S \cdot (\underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{L}^T + \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{F})\right) \\
&= \underset{\sim}{S} : D\underset{\sim}{E}/Dt
\end{aligned} \tag{16.13}$$

hvor (8.9) og $I : \underset{\sim}{\Sigma}^T \cdot \underset{\sim}{L} = I : (\underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underset{\sim}{\Sigma}^T \cdot \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{F})$ er benyttet. Man har således

$$P_i = \int_V \underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{E}} dV \tag{16.14}$$

Ovenstående betragtninger er baseret på Newtons love, som gælder for lukkede systemer, dvs. legemer med konstant masse. For mere generelle systemer må man basere sig på impulssætningen $\overline{F} = D\overline{p}/Dt$, hvor $\overline{p} = \int_v \rho\overline{v}dv$ er systemets impuls (bevægelsesmængde) samt impulsmomentsætningen $\overline{M} = D\overline{L}/Dt$, hvor $\overline{L} = \int_v \overline{r} \times \rho\overline{v}dv$ er impulsmomentet og $\overline{M}$ er kraftmomentet, $\overline{M} = \int_s \overline{r} \times \overline{\sigma}ds + \int_v \overline{r} \times \rho\overline{b}dv$.

16.2 Energibevarelse

I levende krafts sætning

$$W_y = \Delta K + W_i \tag{16.15}$$

optræder begreberne arbejde og energi i form af ydre og indre kræfters arbejde samt tilvæksten i kinetisk energi. Det fremgår, at arbejde og energi har samme dimension, og de kan følgelig måles i samme enheder.

En anden form for energi optræder i forbindelse med konservative kræfters arbejde. Ved en konservativ kraft $\overline{F}_c$ forstås en kraft, som ved at blive ført fra et punkt til et andet udfører et arbejde W_c bestemt ved

$$W_c = \int_{F_1}^{\overline{r}_2} d\overline{r} \cdot \overline{F}_c \tag{16.16}$$

som er uafhængigt af den vej, langs hvilken kraften føres fra det ene punkt til det andet. Da man for et skalarfelt $\Phi(\overline{r})$ har, se afsnit 5.4

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \int_{\overline{r}_1}^{\overline{r}_2} d\overline{r} \cdot \mathrm{grad}\Phi \tag{16.17}$$

hvor integralets værdi er uafhængig af integrationsvejen, ses det, at man til en konservativ kraft kan knytte et skalarfelt, så

$$\overline{F}_c = -\mathrm{grad}\Phi \tag{16.18}$$

hvor minustegnet er indført, så et positivt arbejde svarer til et tab i Φ.

Φ kaldes den *potentielle energi*, og man har

$$W_c = -\int_{\overline{r}_1}^{\overline{r}_2} d\overline{r} \cdot \mathrm{grad}\Phi = -\Delta\Phi \tag{16.19}$$

dvs. de konservative kræfters arbejde er lig med minus tilvæksten i potentiel energi. For konservative kræfter gælder i henhold til (5.110), at $\mathrm{rot}\overline{F}_c = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\Phi = \overline{0}$.

De ikke-konservative kræfters arbejde er ofte og som regel ledsaget af ikke-mekaniske fænomener, som f.eks. ændringer af temperaturen T og deraf følgende varmestrømninger. Den varme, der tilføres plus det ikke-mekaniske arbejde, som udføres på det betragtede system, betegnes Q, og i stedet for (16.15) har man nu

$$W_y + Q = \Delta K + W_i + Q \tag{16.20}$$

Leddet $W_i + Q$ kaldes tilvæksten i *indre energi* U, dvs.

$$\Delta U = W_i + Q \tag{16.21}$$

På ovenstående baggrund indføres et systems *totale energi* E som summen af systemets kinetiske energi og indre energi

$$E = K + U \tag{16.22}$$

og (16.20) kan skrives

$$W_y + Q = \Delta E \tag{16.23}$$

Ifølge termodynamikkens første hovedsætning er den totale energi konstant i et isoleret system, hvilket er et system, der ikke udveksler energi med sine omgivelser, dvs. $\Delta E = W_y + Q$ er lig med nul. Et isoleret system kan ikke befinde sig i et potentialfelt. Delsystem plus potentialfelt betragtes som system og $\Delta E = 0$ for dette system. Total energi kan altså hverken skabes eller destrueres, men derimod kan energi udmærket flyttes fra et ikke-isoleret system til et andet, ved hjælp af arbejde og varme, ligesom energi kan omformes fra en form til en anden. Tilvæksten i et systems energi, når det gennemløber en proces, bestemmes således ved

$$W_y + Q = \Delta(K + U) \tag{16.24}$$

For en partikel med massen $dm = \rho dv$ er den kinetiske, den indre og den totale energi

$$\begin{aligned} dK &= \rho k dv \\ dU &= \rho u dv \\ dE &= \rho e dv \end{aligned} \tag{16.25}$$

hvor k, u og e betegnes *specifikke* energier. Eksempelvis den samlede kinetiske energi K bestemmes ved

$$K = \int_v \rho k dv \tag{16.26}$$

hvor, i henhold til (16.7), den specifikke kinetiske energi k er

$$k = \frac{1}{2}\overline{v} \cdot \overline{v} = \frac{1}{2}v^2 \tag{16.27}$$

Om den indre energi antages, at den, i modsætning til arbejde og varme, er en tilstandsfunktion, dvs. en funktion, som afhænger af de parametre som til enhver tid beskriver systemets tilstand. Hvilke tilstandsparametre, der her er tale om, udover tøjninger, spændinger, temperatur og varmestrøm, og hvorledes den indre energi afhænger af dem, er spørgsmål, som behandles i forbindelse med konstitutive ligninger. Her skal dog anføres, at når alene mekaniske og termiske fænomener betragtes, og når den tilførte varme pr. tidsenhed udtrykkes ved

$$\dot{Q} = -\int_s \hat{n} \cdot \overline{q} ds \tag{16.28}$$

hvor $\overline{q}$ er varmestrømvektoren (positiv når varme ledes bort fra legemets overflade), da finder man

$$\rho \dot{u} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} - \mathrm{div}\overline{q} \tag{16.29}$$

som udtrykker den materielle tidsafledede af den specifikke indre energi ved mekaniske og termiske størrelser.

Det fremgår, at et systems tilstand ikke kan beskrives isoleret fra omgivelsernes, og ligeledes, at det er energiændringer og ikke absolutte energier, der indgår i udtrykkene.

16.3 Dissipation

Når et systems omgivelser udfører arbejde på og fører varme til systemet, forøges dets energi. Tilsvarende vil et systems energi formindskes, når systemet udfører arbejde på og afgiver varme til omgivelserne. Der er imidlertid ikke nogen regel om, at energi, tilført ved hjælp af for eksempel varme, også skal afgives som varme. Et udtryk for tilstandsfunktionen u, den specifikke indre energi, skal derfor formuleres således, at der til enhver tid på en eller anden måde kan gøres rede for følgende:

a) hvor stor en del u_a af den energi, der er tilført som arbejde, kan igen afgives som arbejde,

b) hvor stor en del u_b af den energi, der er tilført som arbejde, vil blive afgivet som varme,

c) hvor stor en del u_c af den energi, der er tilført som varme, kan afgives som arbejde, og

d) hvor stor en del u_d af den energi, der er tilført som varme, kan igen afgives som varme.

Det er stadigvæk forudsat, at kun mekaniske og termiske fænomener betragtes, og medmindre en del af energien bindes i systemet, så den ikke kan frigives på anden måde end ved, at systemet går i stykker, eller der forekommer faseovergange, er det kun nødvendigt at gøre rede for disse forhold.

Den mekanisme, der er i funktion, når energi tilført som arbejde omformes til varme, er som regel en eller anden form for friktion.

Omformningen vil resultere i en lokal temperaturstigning, og den deraf følgende temperaturdifferens vil medføre en varmestrømning. Denne varmestrømning er ukontrollabel, og da energien herved spredes, taler man om energidissipation. Da man ofte er interesseret i at kunne frigøre energi som arbejde, er denne dissipation uønsket, men uomgængelig.

Formuleringen af tilstandsfunktionen indre energi skal, udover at tilfredsstille ovennævnte krav, også være i overensstemmelse med termodynamikkens anden hovedsætning, som i nærværende sammenhæng postulerer, at mens arbejde kan omformes til varme uden begrænsninger, så kan varme ikke ubegrænset omformes til arbejde. Denne overensstemmelse opnås ved at udtrykke den afledede af den indre energi ved

$$\dot{u} = \dot{u}_a + \dot{u}_b + \dot{u}_c + \dot{u}_d \tag{16.30}$$

og forlange, at $\dot{u}_b$ er en ikke-negativ størrelse. $\dot{u}_b$ er her en del af $D(u_a + u_b)/Dt$, som igen er den del af $\dot{u}$, som hidrører fra arbejde udført på eller af systemet. u_b kaldes dissipationen og betegnes D. Overensstemmelse med termodynamikkens anden hovedsætning opnås således ved at kræve

$$\dot{D} \geq 0 \tag{16.31}$$

og (16.31) udtrykker, at uanset om det er omverden, der udfører arbejde på det betragtede system, eller det er systemet, der udfører arbejde på sin omverden, da er der en ikke-negativ del af den indre energi, som omformes til varme.

16.4 Konjugerede spændings- og deformationsstørrelser

Af ligningerne (16.6), (16.12) og (16.14) fremgår, at størrelsen $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d}$ udtrykker indre kræfters effekt pr. volumenenhed i den deformerede tilstand, mens $\underset{\sim}{\Sigma} : \underset{\sim}{L}$ og $\underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{E}}$ er indre kræfters effekt sat i relation til volumenenhed i den initiale tilstand. Da man, jævnfør afsnit 8, har

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{d} &= D\underset{\sim}{\varepsilon}/Dt \\ \underset{\sim}{L} &= D\underset{\sim}{F}^T/Dt \\ \dot{\underset{\sim}{E}} &= D\underset{\sim}{E}/Dt \end{aligned} \tag{16.32}$$

benytter man betegnelsen *konjugerede spændings- og deformationsstørrelser* om Cauchyspændingen $\underset{\sim}{\sigma}$ og den infinitesimale tøjningstensor $\underset{\sim}{\varepsilon}$, om den første Piola-Kirchhoff spænding $\underset{\sim}{\Sigma}$ og deformationsgradienten $\underset{\sim}{F}^T$ samt om den anden Piola-Kirchhoff spænding $\underset{\sim}{S}$ og Lagrange-tøjningen $\underset{\sim}{E}$. Ved formuleringen af udtryk for den indre energi, f.eks. ved opstilling af konstitutive ligninger, er det sådanne konjugerede størrelser, som skal benyttes. Det er naturligvis ikke nødvendigt at bruge netop et af de tre ovennævnte par, men vil man benytte f.eks. et andet deformationsmål end $\underset{\sim}{\varepsilon}$, $\underset{\sim}{F}^T$ eller $\underset{\sim}{E}$, da er man nødt til at bestemme den dertil konjugerede spænding således, at det dobbelte prikprodukt af spændingen og den materielle tidsafledede af det valgte deformationsmål repræsenterer arbejde pr. tidsenhed.

17. INDRE BINDINGER

I afsnit 9.2 er kinematiske bindinger behandlet, og det skal her vises, at forekomsten af sådanne bindinger medfører ubestemheder i nogle dynamiske størrelser. Dette gøres ved at betragte de indre kræfters effekt $P_i = \int_v \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} dv$ og ved samtidig at udtrykke spændingstensoren på hensigtsmæssige måder. Ved en ubestemt spændingskomponent forstås en komponent, som ikke giver noget bidrag til de indre kræfters effekt. Sådanne komponenter kan omvendt heller ikke bestemmes ud fra kendskab til de indre kræfters effekt og tøjningshastighedstensoren. Nogle specielle bindinger skal behandles.

17.1 Længdekonstans

For et legeme, som deformeres under længdekonstans i en retning $\hat{a}$ gælder i.h.t. (8.33), at man i ethvert punkt har

$$\underset{\sim}{d} : \hat{a}\hat{a} = 0 \tag{17.1}$$

Vælges det nu at skrive spændingstensoren på formen

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{T} + t\hat{a}\hat{a} \tag{17.2}$$

har man

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{d} + t\underset{\sim}{d} : \hat{a}\hat{a} = \underset{\sim}{T} : \underset{\sim}{d} \tag{17.3}$$

idet leddet $t\hat{a}\hat{a}$ ikke giver noget bidrag til de indre kræfters effekt uanset størrelse af t. Denne spændingskomponent er således ubestemt. Af

$$t = \underset{\sim}{\sigma} : \hat{a}\hat{a} \tag{17.4}$$

fremgår, at t er et ubestemt træk eller tryk i retningen $\hat{a}$, den ustrækkelige retning.

17.2 Volumenkonstans

Deformation under volumenkonstans foregår i henhold til (8.33) med

$$\operatorname{div} \bar{t} = I_d = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{d} = 0 \tag{17.5}$$

For at kunne vurdere ubestemheden i dette tilfælde skrives spændingstensoren $\underset{\sim}{\sigma}$ som

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{s} - p\underset{\sim}{I} \tag{17.6}$$

hvor $\underset{\sim}{s}$ kaldes *deviationsspændinger* og p er et alsidigt tryk eller træk, jfr. 14.1a, ofte kaldet en hydrostatisk spænding. Hermed bliver

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{s} : \underset{\sim}{d} + p\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{d} \tag{17.7}$$

hvor, i henhold til (17.5), det sidste led er nul. Der er således tale om en ubestemt hydrostatisk spænding.

17.3 Arealkonstans

Under arealkonstans gælder i.h.t. (8.33)

$$\operatorname{div}\bar{t} - \hat{n} \cdot \underset{\sim}{d} \cdot \hat{n} = I_d - \hat{n} \cdot \underset{\sim}{d} \cdot \hat{n} = 0 \tag{17.8}$$

hvor $\hat{n}$ er normal til de flader, hvis areal ikke ændres. Spændingstensoren skrives i dette tilfælde

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{P} - p(\underset{\sim}{I} - \hat{n}\hat{n}) \tag{17.9}$$

og man får

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{d} + p(I_d - \hat{n}\hat{n} : \underset{\sim}{d}) = \underset{\sim}{P} : \underset{\sim}{d} \tag{17.10}$$

Den ubestemte spænding $p(\underset{\sim}{I} - \hat{n}\hat{n})$ er i dette tilfælde en spænding, som er lige stor i alle retninger vinkelret på $\hat{n}$, normalen til konstante arealer.

Det bemærkes, at $\hat{n}$ ligesom $\hat{a}$ i (17.1) er funktioner af stedvektoren $\bar{r}$.

17.4 Stivlegemebevægelse

I en stivlegemebevægelse er tøjningshastighedstensoren $\underset{\sim}{d}$ lig med nultensoren og de indre kræfters effekt er nul. Spændingstensoren er fuldstændig ubestemt, og hele det arbejde, der udføres på legemet, bliver til kinetisk energi.

17.5 En dynamisk binding

Bindingerne ovenfor er kinematiske, men også dynamiske bindinger forekommer, og de tilsvarende ubestemtheder er da kinematiske. Som et eksempel på en dynamisk binding betragtes

$$3\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\sigma} - I_\sigma^2 = 2k^2 \tag{17.11}$$

hvor $I_\sigma = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{I}$ er spændingstensorens første hovedinvariant, og k er en konstant. Med tøjningshastighedstensoren

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{d}_e + \lambda(3\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{I} I_\sigma) \tag{17.12}$$

har man

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d}_e + \lambda(3\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\sigma} - I_\sigma^2) = \underset{\sim}{\sigma} : d_e + 2\lambda k^2 \tag{17.13}$$

Der optræder altså nogle ubestemte tøjningshastigheder $\lambda(3\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{I} I_\sigma)$, som kun delvis afhænger af spændingstensoren.

Indre bindinger spiller en rolle ved blandt andet opstilling af konstitutive ligninger, idet man for de ubestemte spændingskomponenter i afsnit 17.1–17.4 ikke kan foreskrive nogen konstitutiv sammenhæng med den bundne deformation. De ubestemte spændinger hørende til en kinematisk binding kaldes ofte *reaktionsspændinger*. De spændinger, der indgår i de konstitutive ligninger, er da *ekstraspændinger*, og summen af reaktionsspændinger og ekstraspændinger er *totale spændinger*.

18. VIRTUELT ARBEJDE, VARIATIONSFORMULERING

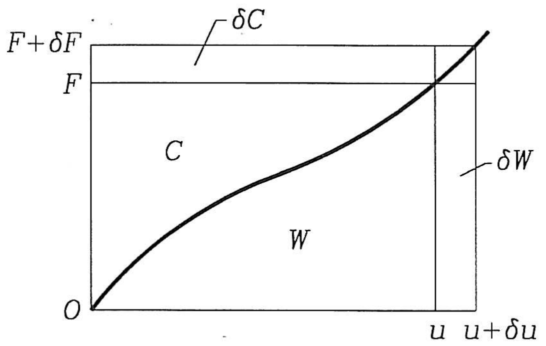
De kinematiske og dynamiske størrelser, som benyttes i afsnit 16, er de virkeligt forekommende fysiske størrelser, men man kan også anvende en kombination af virkelige og virtuelle størrelser. Ved for eksempel en virtuel flytning forstås en tænkt flytning, en flytning man forestiller sig, men som ikke er den, der finder sted, og i visse tilfælde ikke engang kan finde sted. Med betegnelsen $\delta\overline{u}$ for en virtuel flytning vil kraften $\overline{F}$ udføre det virtuelle arbejde δW bestemt ved

$$\delta W = \delta\overline{u} \cdot \overline{F} \tag{18.1}$$

Tilsvarende indføres virtuelle kræfter $\delta\overline{F}$, som udfører det virtuelle komplementære arbejde δC bestemt ved

$$\delta C = \overline{u} \cdot \delta\overline{F} \tag{18.2}$$

et begreb, som ikke har noget fysisk modstykke. Forklaringen på betegnelsen komplementær fremgår af figur 18.1, som viser δW og δC i det tilfælde, hvor $\overline{u}$ og $\overline{F}$ er pa-



Figur 18.1

rallelle, idet $\delta(\overline{u}\cdot\overline{F}) = \delta W + \delta C$. Figuren viser yderligere arbejdet $W = \int d\overline{u}\cdot\overline{F}$, og det komplementære arbejde $C = \int \overline{u} \cdot d\overline{F}$, som udføres, når kraften $\overline{F}(\overline{u})$ ad en foreskreven vej føres fra $\overline{0}$ til $\overline{u}$.

Grundlaget for de virtuelle arbejdsprincipper opstilles ved at betragte et arbitrært spændingsfelt $\underset{\sim}{\sigma}(\overline{r})$ og et ligeledes arbitrært flytningsfelt $\overline{u}(\overline{r})$, (eventuelt et hastighedsfelt $\overline{v}(\overline{r})$). Det skal fremhæves, at de to felter ikke på nogen måde er forbundet med hinanden. Idet sammenhængen (12.9) mellem spændingsvektor $\overline{\sigma}$ og spændingstensor $\underset{\sim}{\sigma}$ forudsættes at gælde, har man

$$\int_s \overline{\sigma} \cdot \overline{u} ds = \int_s \hat{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \overline{u} ds = \int_v \operatorname{div}(\underset{\sim}{\sigma} \cdot \overline{u}) dv \tag{18.3}$$

og med

$$\operatorname{div}\left(\underset{\sim}{\sigma}\cdot\overline{u}\right)=\overline{t}^{k}\cdot\left(\underset{\sim}{\sigma}'_{k}\cdot\overline{u}+\underset{\sim}{\sigma}\cdot\overline{u}'_{k}\right)=\operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}\cdot\overline{u}+\underset{\sim}{\sigma}:\operatorname{grad}\overline{u} \tag{18.4}$$

får man, at en størrelse A_y kan udtrykkes

$$\begin{aligned} A_y &\equiv \int_s \overline{\sigma}\cdot\overline{u}ds+\int_v \rho\overline{b}\cdot\overline{u}dv= \\ &=\int_v\left(\operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}+\rho\overline{b}\right)\cdot udv+\int_v\underset{\sim}{\sigma}:\operatorname{grad}\overline{u}dv \end{aligned} \tag{18.5}$$

Med bevægelsesligningen (13.4) får man

$$A_y=\int_v\rho\overline{a}\cdot\overline{u}dv+\int_v\underset{\sim}{\sigma}:\operatorname{grad}\overline{u}dv \tag{18.6}$$

som med

$$A_a\equiv\int_v\rho\overline{a}\cdot\overline{u}dv \tag{18.7}$$

$$A_i\equiv\int_v\underset{\sim}{\sigma}:\operatorname{grad}\overline{u}dv=\int_v\underset{\sim}{\sigma}:\underset{\sim}{h}dv \tag{18.8}$$

bliver

$$A_y=A_a+A_i \tag{18.9}$$

Som nævnt er spændinger og flytninger uafhængige af hinanden. I figur 18.2 er sammenhørende kinematiske størrelser og sammenhørende dynamiske størrelser vist.

kinematiske størrelser

$$\int_s\overline{\sigma}\cdot\overline{u}ds+\int_v\rho\overline{b}\cdot\overline{u}dv=\int_v\rho\overline{a}\cdot\overline{u}+\int_v\underset{\sim}{\sigma}:\underset{\sim}{h}dv$$

dynamiske størrelser

Figur 18.2

Man bemærker, at accelerationsvektoren optræder som en dynamisk størrelse i inertileddet.

Såfremt man ønsker at referere til den udeformerede konfiguration, benyttes et arbitrært spændingsfelt $\underset{\sim}{\Sigma}(\overline{R})$ og et arbitrært flytningsfelt $\overline{u}(\overline{R})$, og (17.9) gælder med

$$A_y = \int_S \overline{\Sigma} \cdot \overline{u} ds + \int_V \rho_0 \overline{b} \cdot \overline{u} dV \tag{18.10}$$

$$A_a = \int_V \rho_0 \overline{a} \cdot \overline{u} dV \tag{18.11}$$

$$A_i = \int_V \underset{\sim}{\Sigma} : \mathrm{Grad}\, \overline{u} dV = \int \underset{\sim}{\Sigma} : \underset{\sim}{H} dV \tag{18.12}$$

Da Cauchys spændingstensor $\underset{\sim}{\sigma}$ er selvtransponeret kan (18.8) skrives

$$A_i = \int_v \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{j}\, dv \tag{18.13}$$

hvor $\underset{\sim}{j} = (\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{h}^T)/2$ er den selvtransponerede del af flytningsgradienttensoren $\underset{\sim}{h}$. I modsætning hertil er den første Piola-Kirchhoff spændingstensor $\underset{\sim}{\Sigma}$ ikke selvtransponeret og udtrykket (18.12) kan derfor ikke omskrives, medmindre man indfører den anden Piola-Kirchhoff spændingstensor. Med omskrivninger som i (16.13) får man da

$$A_i = \int_V \underset{\sim}{S} : (\underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{j} \cdot \underset{\sim}{F}) dV \tag{18.14}$$

hvor $\underset{\sim}{F}$ er deformationsgradienten.

Ovenstående gælder som nævnt under forudsætning af, at de dynamiske randbetingelser

$$\overline{\sigma} = \hat{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \ , \ \overline{\Sigma} = \hat{N} \cdot \underset{\sim}{\Sigma} \tag{18.15}$$

og bevægelsesligningerne

$$\mathrm{div}\, \underset{\sim}{\sigma} + \rho \overline{b} = \rho \overline{a}, \ \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^T, \ \mathrm{Div}\, \underset{\sim}{\Sigma} + \rho_0 \overline{b} = \rho_0 \overline{a}, \ \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{\Sigma}^T \cdot \underset{\sim}{F}^T \tag{18.16}$$

gælder sammen med $\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{\Sigma} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T}$ og de kinematiske relationer

$$\underset{\sim}{h} = \mathrm{grad} \overline{u}, \ \underset{\sim}{j} = (\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{h}^T)/2, \ \underset{\sim}{H} = \mathrm{Grad}\, \overline{u} \tag{18.17}$$

18.1 Virtuelle arbejdsprincipper

Til en given værdi af evolutionsparameteren α befinder et legeme sig i en tilstand karakteriseret ved bl.a. spændingsfeltet $\underset{\sim}{\sigma}(\overline{r})$ og flytningsfeltet $\overline{u}(\overline{r})$.

Først benyttes det aktuelle spændingsfelt $\underset{\sim}{\sigma}(\overline{r})$ sammen med et virtuelt flytningsfelt $\delta\overline{u}(\overline{r})$. For størrelserne A_y, A_a og A_i i (18.9) benyttes betegnelserne *de ydre kræfters virtuelle arbejde*:

$$\begin{aligned} \delta W_y &= \int_s \overline{\sigma} \cdot \delta\overline{u} ds + \int_v \rho\overline{b} \cdot \delta\overline{u} dv \\ &= \int_s \overline{\Sigma} \cdot \delta\overline{u} dS + \int_V \rho_0\overline{b} \cdot \delta\overline{u} dV \end{aligned} \tag{18.18}$$

accelerationskræfternes eller *inertikræfternes virtuelle arbejde*:

$$\delta W_a = \int_v \rho\overline{a} \cdot \delta\overline{u} dv = \int_V \rho_0\overline{a} \cdot \delta\overline{u} dV \tag{18.19}$$

og *de indre kræfters virtuelle arbejde*:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_v \underset{\sim}{\sigma} : \delta\underset{\sim}{j}\, dv \\ &= \int_V \underset{\sim}{\Sigma} : \delta\underset{\sim}{H} dV = \int_V \underset{\sim}{\Sigma} : \delta\underset{\sim}{F}^T dV \\ &= \int_V \underset{\sim}{S} : (\underset{\sim}{F}^T \cdot \delta\underset{\sim}{j} \cdot \underset{\sim}{F}) dV \end{aligned} \tag{18.20}$$

Ligningen

$$\delta W_y = \delta W_a + \delta W_i \tag{18.21}$$

kaldes *arbejdsligningen*, den udtrykker *det virtuelle arbejdes princip* eller *de virtuelle flytningers princip*.

(18.15) og (18.16) gælder uændret, mens (18.17) gælder med

$$\delta\underset{\sim}{h} = \text{grad}\,\delta\overline{u} \ , \ \delta\underset{\sim}{j} = (\delta\underset{\sim}{h} + \delta\underset{\sim}{h}^T)/2 \ , \ \delta\underset{\sim}{H} = \text{Grad}\,\delta\overline{u} \tag{18.22}$$

I (18.20d) er $\underset{\sim}{F}$ den aktuelle deformationsgradient.

Ved anvendelserne benyttes ofte virtuelle flytningsfelter med infinitesimale virtuelle flytningsgradienter $\delta\underset{\sim}{\eta}$, og udtrykket for de indre kræfters virtuelle arbejde bliver da

$\delta W_i = \int_v \underset{\sim}{\sigma} : \delta \underset{\sim}{\varepsilon} dv$, hvor $\delta \underset{\sim}{\varepsilon} = (\delta \underset{\sim}{\eta} + \delta \underset{\sim}{\eta}^T)/2$ er den virtuelle inifinitesimale tøjningstensor. Ved anvendelserne ser man ligeledes ofte anført, at der i udtrykket for de ydre kræfters virtuelle arbejde $\delta W_y = \int_s \overline{\sigma} \cdot \delta \overline{u} ds + \int_v \rho \overline{b} \cdot \delta \overline{u} dv$ kun skal integreres over den del af randen, s_1, hvor der er foreskrevet dynamiske randbetingelser, idet der benyttes et virtuelt flytningsfelt med $\delta \overline{u} = \overline{0}$ på den resterende del af randen. Dette er ofte bekvemt, men det skal præciseres, at arbejdsligningen (18.21) gælder for ethvert virtuelt flytningsfelt.

Herefter benyttes det aktuelle flytningsfelt $\overline{u}(\overline{r})$ sammen med et virtuelt spændingsfelt $\delta \underset{\sim}{\sigma}(\overline{r})$. For størrelserne A_y, A_a og A_i i (18.9) benyttes nu betegnelserne *de ydre kræfters virtuelle komplementære arbejde*

$$\begin{aligned} \delta C_y &= \int_s \delta \overline{\sigma} \cdot \overline{u} ds + \int_v \rho \delta \overline{b} \cdot \overline{u} dv \\ &= \int_S \delta \overline{\Sigma} \cdot \overline{u} ds + \int_V \rho_0 \delta \overline{b} \cdot \overline{u} dV \end{aligned} \tag{18.23}$$

inertikræfternes virtuelle komplementære arbejde

$$\delta C_a = \int_v \rho \delta \overline{a} \cdot \overline{u} dv = \int_V \rho_0 \delta \overline{a} \cdot \overline{u} dV \tag{18.24}$$

og *de indre kræfters virtuelle komplementære arbejde*

$$\begin{aligned} \delta C_i &= \int_v \delta \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{j} dv \\ &= \int_V \delta \underset{\sim}{\Sigma} : \underset{\sim}{H} dV = \int_V \delta \underset{\sim}{\Sigma} : (\underset{\sim}{F}^T - \underset{\sim}{I}) dV \\ &= \int_V \delta \underset{\sim}{S} : (\underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{j} \cdot \underset{\sim}{F}) dV \end{aligned} \tag{18.25}$$

hvor $\delta \underset{\sim}{S} = \delta \underset{\sim}{\Sigma} \cdot \underset{\sim}{F}^{-T}$.

Ligningen

$$\delta C_y = \delta C_a + \delta C_i \tag{18.26}$$

udtrykker *det virtuelle komplementære arbejdes princip* eller *de virtuelle kræfters princip*.

(18.17) gælder uændret, mens (18.15) og (18.16) gælder med

$$\delta\overline{\sigma} = \hat{n} \cdot \delta\underset{\sim}{\sigma} \ , \ \delta\overline{\Sigma} = \hat{N} \cdot \delta\underset{\sim}{\Sigma} \tag{18.27}$$

og

$$\operatorname{div} \delta\overline{\sigma} + \rho\delta\overline{b} = \rho\delta\overline{a}\,,\ \delta\underset{\sim}{\sigma} = \delta\underset{\sim}{\sigma}^T\,,\ \operatorname{Div} \delta\underset{\sim}{\Sigma} + \rho_0\delta\overline{b} = \rho_0\delta\overline{a}\,,\ \underset{\sim}{F} \cdot \delta\underset{\sim}{\Sigma} = \delta\underset{\sim}{\Sigma}^T \cdot \underset{\sim}{F}^T \tag{18.28}$$

I det virtuelle arbejdes princip kan flytninger erstattes med hastigheder, dvs. $\delta\overline{u}$ erstattes med $\delta\overline{v}$, $\delta\underset{\sim}{j}$ med $\delta\underset{\sim}{d}$, og virtuelt arbejde δW erstattes med virtuel effekt δP. Tilsvarende kan man i det virtuelle komplementære arbejdes princip erstatte $\overline{u}$ med $\overline{v}$, $\underset{\sim}{j}$ med $\underset{\sim}{d}$, og δC med $\overline{v}\cdot\delta\overline{F}$. Hermed bliver $\underset{\sim}{F}^T\cdot\underset{\sim}{j}\cdot\underset{\sim}{F}$ erstattet med $\underset{\sim}{F}^T\cdot\overline{d}\cdot\underset{\sim}{F} = D\underset{\sim}{E}/Dt = \dot{\underset{\sim}{E}}$.

18.2 Variationsformulering

Variationsregning beskræftiger sig med funktionaler, dvs. funktioner af argumenter, som selv er funktioner af nogle parametre. Den opgave, som variationsregningen søger at løse, er at bestemme argumentfunktioner, som medfører at den betragtede funktional bliver stationær. Er en argumentfunktion f.eks. en tensor $\underset{\sim}{L}(\overline{r})$ som er en funktion af stedvektoren $\overline{r}$, indfører man en sammenligningsfunktion $\underset{\sim}{L}^*$ ved

$$\underset{\sim}{L}^*(\overline{r},\varepsilon) = \underset{\sim}{L}(\overline{r}) + \varepsilon\underset{\sim}{\eta}(\overline{r}) \tag{18.29}$$

hvor ε er en skalær parameter og $\underset{\sim}{\eta}(\overline{r})$ er en arbitrær tensor af samme orden som $\underset{\sim}{L}$. Størrelsen $\varepsilon\underset{\sim}{\eta}(\overline{r})$ kaldes variationen af $\underset{\sim}{L}$ og for denne indføres variationssymbolet $\delta\underset{\sim}{L}$, så man har

$$\underset{\sim}{L}^* = \underset{\sim}{L} + \varepsilon\underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{L} + \delta\underset{\sim}{L} \tag{18.30}$$

dvs.

$$\delta\underset{\sim}{L} = \varepsilon\underset{\sim}{\eta} = \varepsilon(\partial\underset{\sim}{L}^*/\partial\varepsilon) \tag{18.31}$$

I variationsregning identificeres virtuelle størrelser med variationer af virkelige størrelser. Skrives arbejdsligningen (18.8) på formen $\delta W_a + \delta W_i - \delta W_y = 0$ og benyttes (18.3), (18.6) og (18.7), har man

$$\int_v (\rho\overline{a} \cdot \delta\overline{u} + \underset{\sim}{\sigma} : \delta\underset{\sim}{j} - \rho\overline{b} \cdot \delta u)dv - \int_s \overline{\sigma} \cdot \delta\overline{u} ds = 0 \tag{18.32}$$

Kan man nu bestemme en funktional $F(\overline{u}, \underset{\sim}{j}, \dots)$ med den egenskab, at den første variation af F er lig med venstresiden af (18.32), da vil variationsligningen $\delta F = 0$ være ækvivalent med det virtuelle arbejdes princip. I skrivemåden $F(\overline{u}, \underset{\sim}{j}, \dots)$ antyder prikkerne eventuelle argumentfunktioner, som ikke varieres.

Skriver man tilsvarende den komplementære arbejdsligning (18.18) på formen $\delta C_a + \delta C_i - \delta C_y = 0$ og benytter (18.14), (18.16) og (18.17), har man

$$\int_v (\rho\delta\overline{a} \cdot \overline{u} + \delta\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{j} - \rho\delta\overline{b} \cdot \overline{u}) dv - \int_s \delta\overline{\sigma} \cdot \overline{u} ds = 0 \tag{18.33}$$

Kan man i dette tilfælde bestemme en funktional $G(\overline{\sigma}, \overline{b}, \overline{a}, \underset{\sim}{\sigma}, \dots)$ med den egenskab, at den første variation af G er lig med venstresiden af (18.33), da vil variationsligningen $\delta G = 0$ være ækvivalent med det virtuelle komplementære arbejdes princip. I skrivemåden $G(\overline{\sigma}, \overline{b}, \overline{a}, \underset{\sim}{\sigma}, \dots)$ antyder prikkerne igen eventuelle argumentfunktioner, som ikke varieres.

Går man omvendt ud fra en funktional F, hvis første variation er lig med venstresiden af (18.32), har man med $\delta\underset{\sim}{j} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\delta\overline{u} + \operatorname{grad}\delta\overline{u}^T)$, at δF kan omskrives til

$$\delta F = \int_v \Big((\rho\overline{a} - \rho\overline{b} - \operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma}) \cdot \delta\overline{u} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\sigma}^T - \underset{\sim}{\sigma}) : \delta\underset{\sim}{h} \Big) dv + \int_s (\hat{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma} - \overline{\sigma}) \cdot \delta u ds \tag{18.34}$$

dvs. Eulerligningerne til variationsproblemet $\delta F = 0$ er bevægelsesligningerne $\rho\overline{a} - \rho\overline{b} - \operatorname{div}\underset{\sim}{\sigma} = \overline{0}$ og $\underset{\sim}{\sigma}^T - \underset{\sim}{\sigma} = 0$ samt randbetingelsen $\hat{n} \cdot \underset{\sim}{\sigma} - \overline{\sigma} = 0$.

Tilsvarende finder man ved at gå ud fra en funktional G, hvis første variation er lig med venstresiden af (18.33), at med $\rho\delta\overline{a} - \rho\delta\overline{b} - \operatorname{div}\delta\underset{\sim}{\sigma} = \overline{0}$, $\delta\underset{\sim}{\sigma} = \delta\underset{\sim}{\sigma}^T$ og $\delta\overline{\sigma} = \hat{n} \cdot \delta\underset{\sim}{\sigma}$ bliver

$$\delta G = \int_v \delta\underset{\sim}{\sigma} : \Big(\underset{\sim}{j} - \frac{1}{2}\big(\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{h}^T\big)\Big) dv \tag{18.35}$$

og Eulerligningen til variationsproblemet $\delta G = 0$ bliver den kinematiske ligning $\underset{\sim}{j} - \frac{1}{2}(\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{h}^T) = 0$ hvor $\underset{\sim}{h} = \operatorname{grad}\overline{u}$.

Arbejdsligning og variationsligning er som nævnt ækvivalente, og det kan tilsyneladende virke overflødigt at formulere et variationsproblem. Der er imidlertid store fordele forbundet med at kunne benytte variationsregning og de metoder, der er udviklet til løsning af variationsproblemer. Som eksempler på fordelene kan blandt andre nævnes:

a) funktionalen er en skalar, en tensor af nulte orden,

b) randbetingelser kan indbygges i problemet ved valget af variationen af en argumentfunktion, eller

c) randbetingelser kan opfattes som sidebetingelser og som andre sidebetingelser, f.eks. indre bindinger behandles ved hjælp af Lagrangefaktorer.

d) Der er udviklet metoder til bestemmelse af tilnærmelsesløsninger til variationsproblemer, og

e) da den korrekte løsning svarer til en stationær værdi af den betragtede funktional, maksimum eller minimum, kan variationsformuleringer benyttes til at bestemme øvre og/eller nedre grænser for løsningen.

18.3 Hamiltons princip

Anvendelse af variationsregning åbner mulighed for at formulere kontinuummekanikken på et helt andet grundlag end det, der er benyttet i herværende fremstilling. Bevægelsesligningerne er her opstillet direkte på grundlag af Newtons bevægelseslove for massepartikler, og fremgangsmåden betegnes ofte som den *direkte metode* til opstilling af kontinuummekanikkens bevægelsesligninger.

Variationsmetoder derimod tager udgangspunkt i et andet postulat end Newtons love, nemlig postulatet om, at et bestemt integral, det såkaldte aktionsintegral, antager en stationær værdi under en deformationsproces fra en tilstand til en anden. Skrives aktionsintegralet

$$I = \int_{t_1}^{t_2} M \, dt \tag{18.36}$$

hvor M er en skalær funktion af bl.a. den kinetiske energi, den indre energi, og de ydre kræfters arbejde, skal det altså gælde

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta M \, dt = 0 \tag{18.37}$$

for den aktuelle bevægelse. Bevægelsesligningerne fremkommer nu som Euler-Lagrange ligningerne hørende til variationsligningen (18.37), som betegnes Hamiltons princip.